THE SKOLIAD CORNER

No. 26

R.E. Woodrow

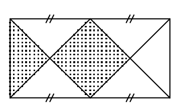
This number we give the 30 problems of the Kangourou Des Mathématiques, Épreuve Européenne, which was given Friday March 22, 1996 to about 500,000 students in 16 European countries, and in 8 African countries, without counting French schools around the world. My thanks go to Ravi Vakil, Canadian Team leader to the 37th IMO in Mumbai, India, who collected a great deal of contest material and forwarded it to me. My copy is in French, and we give it in that language. The contestants are given 75 minutes, and *no calculators are allowed*.

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
March 22, 1996
Time: 75 minutes

1. Les représentants de 12 pays ont choisi pour vous ces 30 questions. Chaque question a été discutée 10 minutes. Quelle a été la durée totale de la discussion? (3 points)

A. 360 min **B.** 300 min **C.** 120 min **D.** 52 min **E.** 40 min.

2. Dans la figure ci-contre, l'aire de la région laissée en blanc est 6 cm^2. Quelle est l'aire de la région grise? (3 points)



A. 3 cm^2 **B.** 4 cm^2 **C.** 6 cm^2 **D.** 9 cm^2 **E.** 12 cm^2.

3. Quel est le plus grand nombre? (3 points)

A. $1 \times 9 \times 9 \times 6$ **B.** $19 \times 9 \times 6$ **C.** $1 \times 99 \times 6$ **D.** $1 \times 9 \times 96$ **E.** 19×96.

4. En utilisant une et une seule fois chacun des chiffres $1, 2, 3$ et 4, je peux écrire différent nombres. Je peux écrire par exemple 3241. Quelle est le différence entre le plus grand et le plus petit nombre ainsi fabriqués? (3 points)

A. 2203 **B.** 2889 **C.** 3003 **D.** 3087 **E.** 3333.

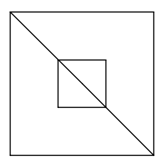
5. Un cercle et un rectangle s'aimaient d'amour tendre, "Mais malheureusement, dit le cercle, que nous croissions ou rétrécissions, nous ne pourrons jamais avoir plus de n points communs!" À votre avis, combien vaut n? (3 points)

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 8.

6. Le nombre $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ est égale à: (3 points)

A. $\frac{3}{1110}$ **B.** $\frac{3}{1000}$ **C.** $\frac{111}{1000}$ **D.** $\frac{111}{1110}$ **E.** $\frac{3}{111}$.

7. La figure ci-contre représente un grand carré d'aire 1 m^2. Une diagonale est partagée en trois segments de même longueur. Le segment médian est une diagonale du petit carré gris. Quelle est l'aire de ce petit carré? (3 points)



A. $\frac{1}{10}m^2$ **B.** $\frac{1}{9}m^2$ **C.** $\frac{1}{6}m^2$ **D.** $\frac{1}{4}m^2$ **E.** $\frac{1}{3}m^2$.

8. La salle d'un théâtre comporte 26 rengées de 24 places chacune. Toutes les places sont numérotées, en commençant par le premier rang. Dans quelle rangée se trouve le siège numéroté 375? (3 points)

A. $12^{\text{éme}}$ **B.** $13^{\text{éme}}$ **C.** $14^{\text{éme}}$ **D.** $15^{\text{éme}}$ **E.** $16^{\text{éme}}$.

9. Parmi les phrases ci-dessous, quelles sont les phrases vraies?(3 points)

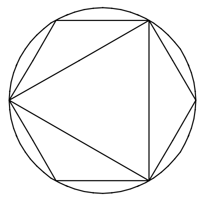
(1)La somme de deux nombres négatifs est toujours négative.
(2)La somme d'une nombre positif et d'un nombre négatif est toujours positive.
(3)La somme d'une nombre négatif et de deux nombres positifs est toujours positive.

A. aucune **B.** la (1) seule **C.** le (1) et la (2)
D. la (2) et la (3) **E.** toutes les trois.

10. a est un nombre de deux chiffres, b est le nombre obtenu en écrivant deux fois, côte à côte, les deux chiffres de a. Quel est le quotient de b par a? (3 points)

A. 10 **B.** 11 **C.** 99 **D.** 100 **E.** 101.

11. Un triangle équilatéral et un hexagone sont inscrits dans un même cercle. Si l'on divise l'aire de l'hexagone par l'aire du triangle, quel est le quotient obtenu? (4 points)



A. 1.5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** π.

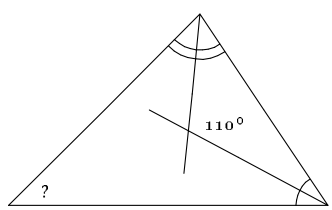
12. Un kangourou a dans sa poche 3 chaussettes blanches, 2 chaussettes noires et 5 chaussettes grises. Sans regarder, il veut en prendre une paire. Quel nombre minimum de chaussettes lui faut-il sortir pour être sûr qu'il en a bien deux de la même couleur? (4 points)

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 7 **E.** 10.

13. À la fête foraine, une fillette a acheté cinq fléchettes. Chaque fois qu'elle touche la cible, elle a deux fléchettes gratis. Elle a lancé en tout 17 fléchettes. Combien de fois a-t-elle touché la cible. (4 points)

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 12 **E.** 17.

14. Les bissectrices de deux angles d'un triangle font entre elles un angle de 110°. Combien vaut le troisième angle de ce triangle? (4 points)

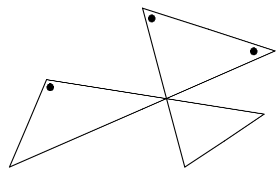


A. 30° **B.** 40° **C.** 45° **D.** 55° **E.** 70°.

15. Une vieille montre retarde de 8 minutes par vingt-quatre heures. De combien de minutes dois-je l'avancer ce soir à 22 heures si j'ai absolument besoin qu'elle me donne l'heure exacte demain matin à 7 heures? (4 points)

A. 1 min 40 s **B.** 2 min 20 s **C.** 3 min **D.** 4 min 30 s **E.** 6 min.

16. La somme, en degrés, des angles marqués sur la figure ci-contre est égale à: (4 points)



A. 120 **B.** 150 **C.** 180 **D.** 270 **E.** 360.

17. Un bidon plein de lait pése 34 kg. Le même bidon quand il est à moitié plein pèse 17, 5 kg. Combien pèse le bidon vide? (4 points)

A. 1 kg **B.** 0, 5 kg **C.** 1, 5 kg **D.** 2 kg

E. il n'y a pas assez de données.

18. Le côtés d'un triangle mesurent 8 cm, 15 cm et 17 cm. Quelle est son aire? (4 points)

A. 40 cm^2 **B.** 60 cm^2 **C.** 68 cm^2 **D.** 80 cm^2

E. on ne peut pas la calculer.

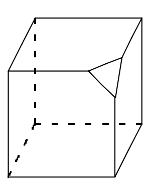
19. Entre 6 heures ce matin et 18 heures ce soir, combien de fois les deux aiguilles de ma montre feront-elles un angle droit? (4 points)

A. 2 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 22 **E.** 24.

20. Simone a un gros tas de dalles triangulaires. Toutes ces dalles ont une forme identique: ce sont des triangles équilatéraux de 1 dm de côté. De combien de dalles Simone aura-t-elle besoin pour daller un grand triangle équilatéral de 2 mètres de côte? (4 points)

A. 200 **B.** 300 **C.** 400 **D.** 600 **E.** 800.

21. En découpant un coin d'un cube en bois, on a obtenu le solide ci-contre. Maintenant on découpe de la même façon les sept autres coins du cube. On a alors un solide qui a quatorze faces (les faces triangulaires ne se touchent pas et ne se recoupent pas). Quel est le nombre s de sommets et le nombre a d'arêtes du solide obtenu? (5 points)



A. $s = 24; a = 36$ **B.** $s = 36; a = 24$
C. $s = 10; a = 15$ **D.** $s = 24; a = 32$
E. $s = 36; a = 18$.

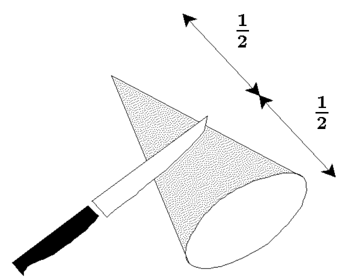
22. On compte le nombre de points d'intersection de quatre droites distinctes. Quel est le nombre qu'l'on est sûr de ne pas trouver? (5 points)

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5 **E.** 6.

23. Combien y a-t-il de triangles, dont les côtés ont pour mesures (en centimètres) des nombres entiers, et dont le périmètre est égal à 15 cm? (5 points)

A. 1 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 19 **E.** 45.

24. Marine et Claire se partagent un cône glacé en le coupant à mi-hauteur. Marine en a plus que Claire! (5 points)



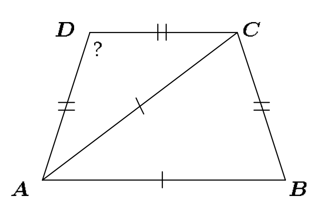
A. 1 fois et demie plus **B.** 2 fois plus **C.** 3 fois plus

D. 7 fois plus **E.** 8 fois plus.

25. Nous sommes sur une ligne de métro circulaire. Vingt-quatre trains s'y déplacent dans la même direction, à intervalles réguliers et roulant tous à la même vitesse. Demain, on doit rajouter des trains afin de diminuer de 20% les intervalles entre deux trains. Combien y aura-t-il de trains supplémentaires demain sur la ligne? (5 points)

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 12.

26. Dans la figure ci-contre, (AB) est parallèle à (CD). De plus $AD - DC - CB$ et $AB = AC$. Combien vaut l'angle $\hat{D}$? (5 points)



A. 108° **B.** 120° **C.** 130° **D.** 150° **E.** on ne peut pas la savoir.

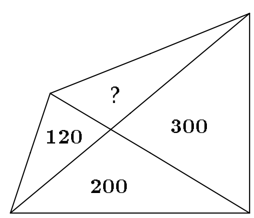
27. Charles a attribué à tous ses livres un code de trois lettres, en utilisant, l'ordre alphabétique: AAA, AAB, AAC, ... , AAZ, ABA, ABB ... Charles a 2203 livres. Quel est le dernier code utilisé par Charles quand il a codé toute sa collection? (5 points)

A. CFS **B.** CHT **C.** DGS **D.** DFT **E.** DGU.

28. Cinq personnes sont assises autour d'une table ronde. Chacune affirme à son tour: "Mes deux voisins, de droite et de gauche, sont des menteurs". On sait que les menteurs mentent toujours et que quelqu'un qui n'est pas un menteur dit toujours la vérité. De plus tout le monde connaît la vérité en ce qui concerne ses deux voisins. Combien y a-t-il de menteurs à cette table? (5 points)

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** on ne peut pas la savoir.

29. On a coupé quatre drôles de parts suivant les diagonales d'un drôle de gâteau plat à quatre côtés. J'ai mangé une part. Mes amis mécontents ont pesé les trois restantes et ont trouvé 120 g. 200 g. et 300 g. Combien pesait la part que j'ai mangée? (5 points)



A. 120 g **B.** 180 g **C.** 280 g **D.** 330 g **E.** 500 g.

30. Dans la suite de chiffres 122333444455555... , chaque entier est écrit autant de fois que sa valeur. Quel est le 1996$^{\text{ème}}$ chiffre écrit? (5 points)

A. 0 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6.

Last issue we gave the problems of the Second Round of the Alberta High School Mathematics Competition, of February 11, 1997. The solutions we give were taken from the contest web site

`http://www.math.ualberta.ca/~ahsmc/sample.htm`

where more information about the contest and the solutions may be found. The solutions are selected from contestants' work. My thanks to E. Lewis, University of Alberta, Chair of the contest, for supplying us with materials.

ALBERTA HIGH SCHOOL MATHEMATICS COMPETITION

February 11, 1997

Second Round

1. Find all real numbers x satisfying $|x-7| > |x+2| + |x-2|$.

Remark. Note that $|a|$ is called the absolute value of the real number a. It has the same numerical value as a but is never negative. For example, $|3.5| = 3.5$ while $|-2| = 2$. Of course, $|0| = 0$.

Solution by Laura Harms, Lorne Jenken High School, Barrhead, Alberta.

If x is in $(-\infty, -2)$, the inequality becomes $7-x > (-2-x)+(2-x)$ which simplifies to $x > -7$. Hence all x in $(-7,-2)$ satisfy the inequality.

If x is in $[-2,2]$, then $|x-2|+|x+2| = 4$, while $|x-7|$ is never less than 5, so all x in $[-2,2]$ satisfy the inequality.

If x is in $(2,7)$, then the inequality becomes $7-x > (x-2)+(x+2)$ which simplifies to $x < \frac{7}{3}$. Hence all x in $(2, \frac{7}{3})$ satisfy the inequality.

If x is in $[7,\infty)$, then $x-7 < x-2 < (x-2)+(x+2)$, and the inequality is not satisfied.

In summary, x satisfies the inequality if and only if $-7 < x < 7/3$.

2. Two lines b and c form a $60°$ angle at the point A, and B_1 is a point on b. From B_1, draw a line perpendicular to the line b meeting the line c at the point C_1. From C_1 draw a line perpendicular to c meeting the line b at B_2. Continue in this way obtaining points C_2, B_3, C_3, and so on. These points are the vertices of right triangles AB_1C_1, AB_2C_2, $AB_3C_3, \ldots$. If area $(AB_1C_1) = 1$, find

$$\text{area }(AB_1C_1) + \text{area }(AB_2C_2) + \text{area }(AB_3C_3) + \cdots + \text{area }(AB_{1997}C_{1997}).$$

Solution by Margaret Tong, James Fowler High School, Calgary, Alberta.

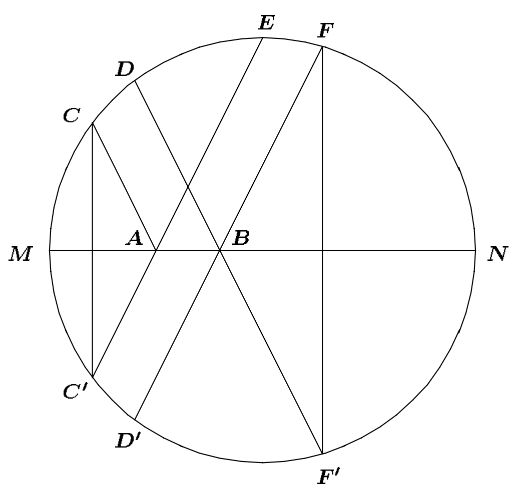
Clearly, triangles AB_nC_n are similar to each other. In a $(30°, 60°, 90°)$ triangle, the hypotenuse is twice as long as the shorter leg. Let $AB_1 = x$. Then $AC_1 = 2x$ and $AB_2 = 4x$. It follows that $\text{area}(AB_nC_n) = 16 \times \text{area}(AB_{n-1}C_{n-1})$, so that the desired total area is given by $T = 1 + 16 + 16^2 + \cdots + 16^{1996}$. Multiplying this by 16, we have $16T =$

$16 + 16^2 + 16^3 + \cdots + 16^{1997}$. Subtraction yields $15T = 16^{1997} - 1$ so that $T = (\frac{1}{15})(16^{1997} - 1)$.

3. A and B are two points on the diameter MN of a semicircle. C, D, E and F are points on the semicircle such that $\angle CAM = \angle EAN = \angle DBM = \angle FBN$. Prove that $CE = DF$.

Solution by Byung-Kyu Chun, Harry Ainlay High School, Edmonton, Alberta.

Complete the circle. Extend EA to cut it at C', and extend DB to cut it at F'. By symmetry, $AC = AC'$ so that $m(AC'C) = m(ACC')$. Similarly, $m(BF'F) = m(BFF')$. Now $m(EC'C) = 180° - m(CAC') = 180° - 2m(CAM) = 180° - 2m(FBN) = 180° - m(FBF') = m(DF'F)$. Since the arcs CE and DF subtend equal angles at the circle, they have equal measure. It follows that the chords CE and DF are equal.



4. (a) Suppose that p is an odd prime number and a and b are positive integers such that p^4 divides $a^2 + b^2$ and p^4 also divides $a(a + b)^2$. Prove that p^4 also divides $a(a + b)$.

(b) Suppose that p is an odd prime number and a and b are positive integers such that p^5 divides $a^2 + b^2$ and p^5 also divides $a(a + b)^2$. Show by an example that p^5 does not necessarily divide $a(a + b)$.

Solution to part (a) by Byung-Kyu Chun, Harry Ainlay High School, Edmonton, Alberta.

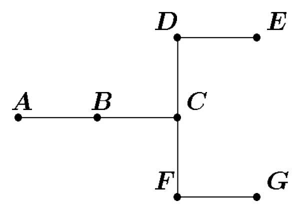
Note that $a(a+b)^2 = a(a^2+b^2)+2a^2b$. Since p^4 divides both $a(a+b)^2$ and a^2+b^2, it must also divide $2a^2b$. Since p is an odd prime, p^4 divides a^2b. Suppose p^2 does not divide a. Then the only powers of p that can possibly divide a^2 are p or p^2. Since p^4 divides a^2b, it follows that p^2 must divide b. Hence p^4 divides b^2. However, this contradicts p^4 dividing $a^2 + b^2$ but not a^2. It follows that we must have p^2 dividing a. Then p^4 divides a^2 so that it also divides b^2. Hence p^2 divides b, and it also divides $a + b$. It follows that

p^4 divides $a(a+b)$.

Solution to part (b) given by Byung-Kyu Chun, Harry Ainlay High School, Edmonton, Alberta; and by Jason Ding, Archbishop MacDonald High School, Edmonton, Alberta.

We look for a, b and p such that p^5 divides a^2+b^2, p^2 divides a and b, but p^3 does not divide $a+b$. Setting $a = p^2x$ and $b = p^2y$, these conditions become p divides x^2+y^2 and p does not divide $x+y$. We can pick $x = 2$, $y = 1$ and $p = 5$. This gives $a = 50$ and $b = 25$ as an example

5. The picture shows seven houses represented by the dots, connected by six roads represented by the lines. Each road is exactly 1 kilometre long. You live in the house marked B. For each positive integer n, how many ways are there for you to run n kilometres if you start at B and you never run along only part of a road and turn around between houses? You have to use the roads, but you may use any road more than once, and you do not have to finish at B. For example, if $n = 4$, then three of the possibilities are: B to C to F to G to F; B to A to B to C to B; and B to C to B to A to B.



Solution by Byung-Kyu Chun, Harry Ainlay High School, Edmonton, Alberta.

The number of ways to travel $n = 1$ kilometre is 2, the ways being B to A and B to C. For $n = 2$, we have 4 ways, B via A to B, B via C to B, B via C to D and B via C to F. Note that the answer is the same had we started at D or F. We guess that the number of ways for any n is exactly 2^n. We now prove this by induction, in an unusual manner. We consider separately the cases $n = 2k$ and $n = 2k+1$.

In the even case, the result is true for $k = 0$. Suppose that the number of ways for $n = 2(k-1)$ is exactly $2^2(k-1)$. At this point, we must be at one of B, D, or F. As pointed out before, there are 4 ways to go another 2 kilometres. Hence, for $n = 2k$, the number of ways is $4 \cdot 2^{2(k-1)} = 2^{2k}$.

For $n = 2k+1$, we use the established fact that for $n = 2k$, the number of ways is exactly 2^{2k}. Again, after $2k$ kilometres, we must be at one of B, D, or F. In each case, there are two ways to go the extra kilometre, bringing the total to $2 \cdot 2^{2(k-1)} = 2^{2k+1}$ for $n = 2k+1$.

That completes the *Skoliad Corner* for this number. Please send me contest materials for use in the Skoliad as well as any comments or suggestions about what you would like to see featured here.