

PROBLÈMES POUR OCTOBRE 2006

Veillez envoyer vos solutions à

Ms. Valeria Pandelieva
441 Kirkwood Avenue
Ottawa, ON K1Z 5X5

au plus tard le 30 novembre 2006. Il est important que votre adresse postale et votre adresse courriel apparaissent en première page. Si vous écrivez votre nom de famille avant votre prénom, soulignez-le.

458. Soit ABC un triangle. Soit l'image du point A obtenu par une réflexion selon l'axe BC , B_1 l'image du point B obtenu par une réflexion selon l'axe AC et C_1 l'image du point C obtenu par une réflexion selon l'axe AB . Trouvez tous les angles possibles du triangle ABC tel que $A_1B_1C_1$ est un triangle équilatéral.
459. À la Conférence Internationale de Mathématique, on y trouve exactement 2006 participants. Les organisateurs de la conférence ont remarqués les points suivants: (1) Parmi 3 participants quelconques, 2 d'entre eux parlent une même langue, et (2) chaque participant parle au moins 5 langues différentes. Prouvez que il existe un groupe d'au moins 202 participants connaissant une langue commune.
460. Soit deux nombres naturels x et y tel que

$$3x^2 + x = 4y^2 + y .$$

Prouvez que la différence positive de ces deux nombres est un carré parfait. Trouvez une solution non triviale à cette équation.

461. Soit x et y deux entiers tel que $x^2 + y^2 \neq 0$. déterminer la valeur minimum de la fonction

$$f(x, y) \equiv |5x^2 + 11xy - 5y^2| .$$

462. Si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, montrer que

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{\frac{d}{a+b}} > 2 .$$

463. À *Carrétopia*, un pays ayant la forme d'un carré dont chaque coté mesure 1000 km, on y compte 51 villes. Les moyens financiers de ce pays lui permet de construire au plus 11000 km de routes. Est-il toujours possible, en considérant cette limite, de dessiner une carte routière de ce pays qui relie chaque ville à une autre?
463. In *Squareland*, a newly-created country in the shape of a square with side length of 1000 km, there are 51 cities. The country can afford to build at most 11000 km of roads. Is it always possible, within this limit, to design a road map that provides a connection between any two cities in the country?
464. Un carré est subdivisé en différents rectangles de telle sorte qu'aucun rectangle n'en recouvre un autre. On considère que chacun de ces rectangles possède un cercle circonscrit correspondant. Prouvez que, si la somme de l'aire de ces cercles est égale à l'aire de ces cercles est égale à l'aire du cercle circonscrit du carré, alors tous ces rectangles sont aussi des carrés.