

31: No 2 MARCH / MARS 2005

Published by:

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada
577 King Edward, POB/CP 450-A
Ottawa, ON K1N 6N5
Fax/Télec: 613 565 1539

©CANADIAN MATHEMATICAL SOCIETY 2005. ALL RIGHTS RESERVED.

SYNOPSIS

65 Skoliad: No. 84 *Robert Bilinski*

- South African Interprovincial Mathematics Olympiad 2004
- Solutions to the Nova Scotia Math League Game 4: Group Questions

73 Mathematical Mayhem

73 Mayhem Problems: M163, M182–M187

M163. Correction. *Proposé par Équipe de Mayhem.*

Montrer qu'il est possible de mettre des entiers non négatifs sur les faces de deux pipés (non nécessairement les mêmes pour les deux) de sorte que tous les résultats 1, 2, 3, ..., 12 soient également probables quand on lance les pipés.

M182. *Proposé par Babis Stergiou, Chalkida, Grèce.*

Si a , b et c sont des nombres positifs tels que $a+b+c = 1$, montrer que

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

M183. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Dans le tableau à droite, on appelle deux lettres *voisines* si elle sont adjacentes horizontalement, verticalement ou diagonalement. Partant d'une lettre "M" quelconque sur le pourtour du tableau, trouver le nombre de possibilités d'épeler le mot "MATH" en bougeant exclusivement entre lettres voisines.

M	M	M	M	M	M	M
M	A	A	A	A	A	M
M	A	T	T	T	A	M
M	A	T	H	T	A	M
M	A	T	T	T	A	M
M	A	A	A	A	A	M
M	M	M	M	M	M	M

M184. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Trouver toutes les solutions (a, b) de l'équation $ab - 24 = 2a$, où a et b sont des entiers positifs.

M185. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

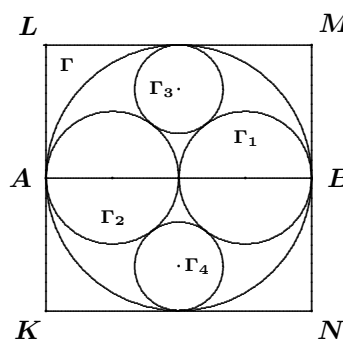
Un lac a la forme d'un triangle avec des côtés de longueur a , b et c . Vues d'un hélicoptère en position stationnaire au-dessus du lac, les lignes de visée des trois sommets sont perpendiculaires deux à deux. A quelle hauteur au-dessus du lac se trouve l'hélicoptère ?

M186. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

On désigne par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier plus petit ou égal à x . Par exemple, $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$ et $\lfloor -7.4 \rfloor = -8$. Sachant que $\sum_{i=1}^n \lfloor \sqrt{i} \rfloor = 217$, trouver la valeur de n .

M187. *Proposé par Bruce Sawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Un cercle Γ de rayon $2r$ est inscrit dans un carré $KLMN$. Le segment AB est un diamètre de ce cercle, A et B étant les points milieu de côtés opposés du carré. Deux cercles Γ_1 et Γ_2 de rayons r sont centrés sur AB et sont extérieurement tangents l'un à l'autre, chacun étant intérieurement tangent à Γ . Deux cercles Γ_3 et Γ_4 sont extérieurement tangents Γ_1 et Γ_2 et intérieurement tangents à Γ .



Avec une règle et un compas, construire la tangente commune à Γ_1 et Γ_3 en minimisant l'usage du compas.

Quel est le nombre minimal qui a été fait de l'usage du compas ?

.....

M163. *Correction. Proposed by the Mayhem Staff.*

Show that it is possible to put non-negative integer values on the faces of two dice (not necessarily the same on both dice) so that, when the dice are tossed, the outcomes $1, 2, 3, \dots, 12$ are equally probable.

M182. *Proposed by Babis Stergiou, Chalkida, Greece.*

If a, b, c are positive numbers, such that $a + b + c = 1$, prove that

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

M183. *Proposed by the Mayhem Staff.*

In the array at right, two letters are called *neighbouring* letters if they are adjacent to each other horizontally, vertically, or diagonally. Starting from any letter “M” on the outside of the array, find the number of ways of spelling “MATH” by moving only between neighbouring letters.

```

M M M M M M M
M A A A A A M
M A T T T A M
M A T H T A M
M A T T T A M
M A A A A A M
M M M M M M M
    
```

M184. *Proposed by the Mayhem Staff.*

Find all solutions (a, b) for the equation $ab - 24 = 2a$, where a and b are positive integers.

M185. *Proposed by Neven Jurić, Zagreb, Croatia.*

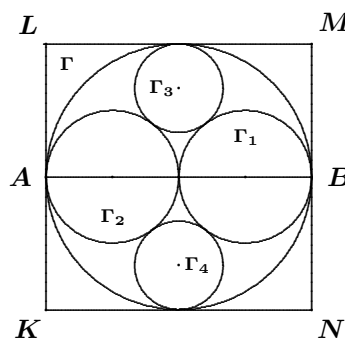
A lake has the shape of a triangle with sides of length a , b , and c . From a helicopter, which is hovering in a stationary position above the lake, the lines-of-sight to the three vertices of the triangle are pairwise perpendicular. How high is the helicopter above the lake?

M186. *Proposed by the Mayhem Staff.*

Let $\lfloor x \rfloor$ denote the greatest integer less than or equal to x . For example, $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$ and $\lfloor -7.4 \rfloor = -8$. Given that $\sum_{i=1}^n \lfloor \sqrt{i} \rfloor = 217$, determine the value of n .

M187. *Proposed by Bruce Sawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

A circle Γ of radius $2r$ is inscribed in a square $KLMN$. Line segment AB is a diameter of this circle, where A and B are mid-points of opposite sides of the square. Two circles Γ_1 and Γ_2 of radii r have centres on AB and are externally tangent to one another, and each is internally tangent to Γ . Two circles Γ_3 and Γ_4 are externally tangent to Γ_1 and Γ_2 and internally tangent to Γ .



Construct the common tangent to Γ_1 and Γ_3 using straight edge and compass with a minimum use of the compass.

What is the minimum number of times that the compass has to be used?

- 80 Problem of the Month *Ian VanderBurgh*
- 82 Pólya's Paragon: Fun With Numbers (Part 2)
- 84 Iterating Möbius Functions with Rational Coefficients, Part I
by *Kun-Chieh Wang*

A Möbius function is a function of the form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

where z is a complex variable and the coefficients a , b , c , and d are complex numbers such that $ad \neq bc$.

In this paper and Part II, the author determines all the possible periods of a periodic sequence of functions obtained by iterating a Möbius function with rational coefficients.

Enjoy!

- 88 The Olympiad Corner: No. 244 *R.E. Woodrow*
Featuring the Concours Général des Lycées Session de 2001 Composition de Mathématiques, Classe terminale S; and readers' solutions to some of the problems from
 - the 2000 Chinese Mathematical Olympiad;
 - the 2000 Russian Mathematical Olympiad;
 - the 2000 Korean Mathematical Olympiad;
 - the 2000 Vietnamese Mathematical Olympiad.

103 Book Reviews *John Grant McLoughlin*

- 103 *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (2nd Ed.)*
by George Pólya (with a new forward by John Conway)
Reviewed by Curt Crane
- 104 *USA and International Mathematical Olympiads 2003*
by Titu Andreescu and Zuming Feng
Reviewed by Ian VanderBurgh

- 105 Problems: 3013–3026
This month's "free sample" is:

3016. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Deux sphères de rayon r sont extérieurement tangentes. Trois sphères de rayon R sont extérieurement tangentes l'une à l'autre. Si chacune des trois sphères de rayon R sont en même temps extérieurement tangentes aux deux sphères de rayon r , exprimer R en fonction de r .

.....

Two spheres of radius r are externally tangent to each other. Three spheres of radius R are all externally tangent to each other. If each of the three spheres of radius R are at the same time externally tangent to the two spheres of radius r , express R in terms of r .

111 Solutions: 2771, 2868, 2886, 2897, 2914–2925