Problèmes Mayhem

Pour être admissibles au présent DÉFI MAYHEM, les solutions doivent avoir été postées *avant le* **1er mars 2003, cachet de la poste faisant foi. À chaque problème présenté devra être annexée une fiche de renseignements de l'élève.**

M63. Proposé par Richard Hoshino, Université de Dalhousie,

Soit ABC un triangle rectangle d'hypoténuse BC. Du sommet A, construire la hauteur AD et la bissectrice AE de l'angle intérieur (de sorte que D et E soient sur le côté BC). On donne $AD = 28$ et $AE = 35$. Déterminer l'aire du triangle ABC.

M64. Proposé par Edward T.H. Wang, Université Wilfred Laurier

Soit x un nombre réel et soit $f(x) = \lfloor x\lceil x\rceil\rfloor - \lceil x\lfloor x\rfloor\rceil$ (où $\lfloor x\rfloor$ est le plus grand entier plus petit ou égal à x et $\lceil x\rceil$ est le plus petit entier plus grand ou égal à x).

(a) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tous les $x \geq 0$, et trouver quand il y a égalité.

(b) Que se passe-t-il si $x < 0$?

M65. Proposé par l'Equipe de Mayhem.

On dispose d'un certain nombre de cubes unités et on les arrange tous pour former un grand cube plein. On peint ensuite certaines des faces du grand cube. Après avoir démonté ce cube, on constate que 1000 des cubes n'ont aucune peinture. Combien de faces du grand cube ont-elles été peintes ?

M66. Proposé par Václav Konečný, Ferris State University, Big Rapids, MI, USA.

Trouver des entiers positifs N en base 10 tels que $N!$ en base 6 finisse exactement par 99 zéros.

M67. Proposé par J. Walter Lynch, Athens, GA, USA

Trouver l'intervalle contenant r tel que trois termes consécutifs de la progression géométrique a, ar, ar^2, $\ldots$ soient les côtés d'un triangle.

M68. Proposé par l'Equipe de Mayhem.

Vous vous déplacez en spirale dans le plan cartésien. Partant de $(0,0)$, vos cinq premiers pas passent par les points $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$ et $(-1,0)$. A quel point arriverez-vous à votre $2002^{\text{ième}}$ pas ?