Problèmes Mayhem

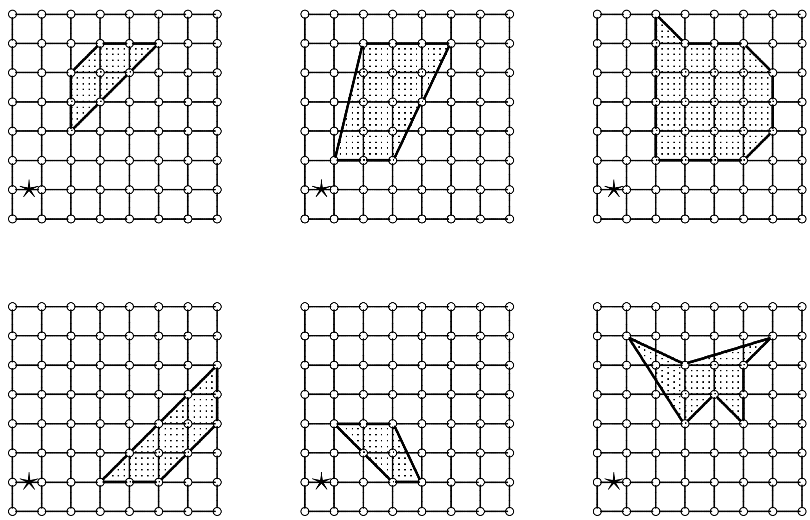
Pour être admissibles au DÉFI MAYHEM de mai 2002, les solutions doivent avoir été postées *avant le* **1er septembre 2002, cachet de la poste faisant foi. À chaque problème présenté devra être annexée une fiche de renseignements de l'élève.**

M45. *Proposé par un douanier canadien, Aéroport International Pearson de Toronto, Ontario*.

On appuye une échelle de dix mètres à la fois contre une paroi et contre l'arête d'une boîte cubique mesurant 2 m^3, elle-même posée contre la paroi. A quelle hauteur au-dessus du sol se trouve le sommet de l'échelle ?

M46. *Proposé par Eckard Specht, Otto-von-Guericke-University Magdeburg, Allemagne*.

Les polygones des réseaux de la ligne supérieure sont caractérisés par une propriété commune. Ceux de la ligne inférieure par son inverse. Quelle est cette propriété ?



M47. *Proposé par Bill Sands, University of Calgary, Calgary, Alberta*.

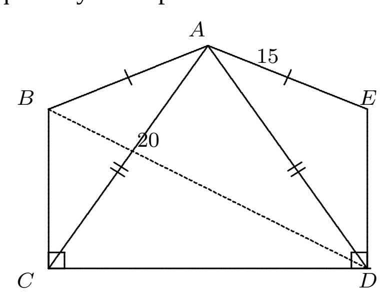
(a) Trouver tous les polynômes unitaires quadratiques $x^2 + ax + b$ avec 1, a, b en progression arithmétique et possédant des racines entières.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de nombres réels a, b, c avec 1, a, b, c en progression arithmétique et tels que toutes les racines de $x^3 + ax^2 + bx + c$ soient réelles.

M48. *Proposé par J. Walter Lynch, Athens, GA, USA*.

Décrire comment faire un bouchon pouvant à la fois boucher un trou carré, un trou rond et un trou triangulaire et aussi passer à travers chacun d'eux.

A titre indicatif, notons qu'une pyramide peut boucher un trou carré et un trou triangulaire, ou encore qu'un cylindre peut boucher un trou carré et un trou rond.



M49. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde*.

La figure montre un pentagone de Héron dans lequel les côtés, les diagonales et l'aire sont des nombres naturels.

(a) $AB = AE = 15$, $AC = AD = 20$ et $BCDE$ est un rectangle. Trouver la longueur de BD.

(b) Trouver un ensemble d'expressions générales pour les côtés, les diagonales et l'aire pouvant engendrer une famille infinie de pentagones de Héron $ABCDE$ pareils à celui donné dans la figure.

M50. *Proposé par l'équipe de Mayhem.*

Ceci est une variante d'un problème bien connu et souvent exploité. On demande d'engendrer une liste de valeurs aussi longue que possible en utilisant des opérations impliquant, par exemple, 4 fois le nombre 4, comme

$$\frac{4+4}{4+4} \;=\; 1\,, \qquad\qquad 4+4-\sqrt{4}-4 \;=\; 2\,,$$

et ainsi de suite. Dans ce genre de problème, on utilise souvent les chiffres de l'année courante (bien qu'on soit maintenant forcé de se contenter de quelques zéros pendant un certain temps).

Le problème ici est de faire la plus longue liste possible de nombres en utilisant **au maximum** cinq fois le nombre π, comme par exemple :

$$\frac{\pi+\pi+\pi}{\pi} \;=\; 3\,, \qquad\qquad \left\lfloor\sqrt{\pi^{\pi}}-\pi+\frac{\pi}{\pi}\right\rfloor! \;=\; 6\,.$$