

Problèmes Mayhem

Pour être admissibles au DÉFI MAYHEM d'avril 2002, les solutions doivent avoir été postées avant le 1er août 2002, cachet de la poste faisant foi. À chaque problème présenté devra être annexée une fiche de renseignements de l'élève.

M39. Proposé par l'équipe de Mayhem.

Trouver x si x est un nombre réel positif et

$$x = 2002 + \frac{1}{2002 + \frac{1}{2002 + \frac{1}{2002 + \frac{1}{2002 + \frac{1}{x}}}}}$$

M40. Proposé par Louis-François Préville-Ratelle, étudiant, Cégep Régional de Lanaudière à L'Assomption, Joliette, Québec.

Soit a et b deux diviseurs de l'entier n tels que $a < b$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{n}{a+1} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\frac{n}{b}+1} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{\frac{n}{a}} \right\rfloor$$

Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier plus petit ou égal à x .

Par exemple, si $n = 24$, $a = 3$, et $b = 6$, ceci signifie :

$$\left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{24}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{24}{8} \right\rfloor,$$

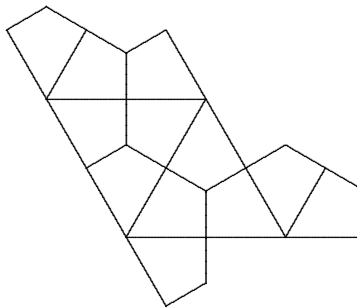
qui se réduit à l'identité $6 + 4 + 4 = 4 + 4 + 3 + 3$.

M41. Proposé par J. Walter Lynch, Athens, GA, USA

Trouver le nombre d'ordres des victoires et des défaites possibles dans une Série Mondiale. Par exemple, si la série s'achève après cinq parties, il y a huit ordres possibles : ANNNN NANNN NNANN NNNAN NAAAA ANAAA AANAA AAANA où **A** désigne une victoire de la Ligue Américaine et **N** celle de la Ligue Nationale. Noter que la série se termine dès qu'une équipe gagne quatre parties.

M42. Proposé par Izidor Hafner, Tržaška 25, Ljubljana, Slovénie.

Le diagramme ci-dessous représente le développement d'un polyèdre sur un plan. Les faces du solide sont divisées en polygones plus petits. Le problème consiste à colorer les polygones (ou à les numéroter) de telle sorte que chaque face du solide original soit d'une couleur différente.



M43. Proposé par l'équipe de Mayhem.

Montrer que

$$\frac{29 - 5\sqrt{29}}{58} \left(\frac{7 + \sqrt{29}}{2} \right)^{2002} + \frac{29 + 5\sqrt{29}}{58} \left(\frac{7 - \sqrt{29}}{2} \right)^{2002}$$

est un entier.

M44. Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.

Soit $ABCD$ un parallélogramme de Heron (dont les côtés, les diagonales et l'aire sont des nombres naturels). Les diagonales AC et BD mesurent respectivement 85 et 41. Trouver les longueurs des côtés AB et BC .