Problèmes Mayhem

Pour être admissibles au DÉFI MAYHEM de février 2002, les solutions doivent avoir été postées *avant le* **1er juin 2002, cachet de la poste faisant foi. À chaque problème présenté devra être annexée une fiche de renseignements de l'élève.**

M29. *Proposé par l'équipe de Mayhem.*

On définit le "produit singulier" de deux nombres comme la somme des produits de leurs chiffres respectifs. Par exemple : $235 \times_s 718 = 2 \times 7 + 3 \times 1 + 5 \times 8 = 57$. Trouver deux nombres A et B tels que $A \times_s B = 2002$ et $A + B$ soit minimale.

M30. *Proposé par Haralampy Steryion, Chalkis, Greece.*

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la condition

$$f(x+y) \;=\; f(x)e^{f(y)-1} \qquad \text{pour tout } x,\, y \in \mathbb{R}.$$

M31. *Proposé par l'équipe de Mayhem.*

On considère quatre sphères de rayon unité, chacune tangente aux trois autres. Trouver le rayon des deux sphères qui sont simultanément tangentes aux quatre sphères données.

M32. *Proposé par Nicolae Gustia, North York, Ontario.*

Montrer que si dans un triangle, les angles A, B et C satisfont la condition $8 \cos A \cos B \cos C = 1$, alors le triangle est équilatéral.

M33. *Proposé par Richard Hoshino, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia.*

Les entiers a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Si $a + b + c = 7$, trouver toutes les valeurs possibles de a, b et c.