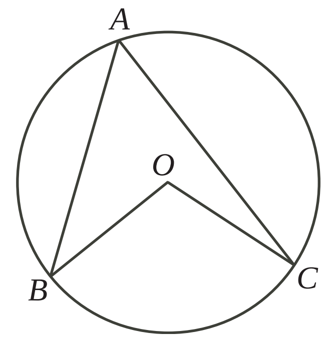
Problèmes

1. Dans la figure ci-contre, le cercle a pour centre O et pour rayon $\sqrt{7}$. Les points A, B et C sont situés sur le cercle. Sachant que $\angle BOC = 120°$ et $AC = AB + 1$, déterminer la longueur du segment AB.



2. Benoît choisit un ensemble $A = \{a, b, c, d, e\}$ de cinq nombres réels de manière que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Danica détermine les sous-ensembles de A qui contiennent trois nombres et additionne les trois nombres de chaque sous-ensemble. Elle obtient les sommes $0, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 19$. Quels sont les cinq nombres dans l'ensemble de Benoît ?

3. Déterminer toutes les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 12 \\ xy + x + y &= 3 \end{aligned}$$

4. Alphonse et Béatrice jouent à un jeu sur un tableau noir. Au départ, le tableau est vierge. Ils jouent à tour de rôle en commençant par Alphonse. À son premier tour, Alphonse écrit l'entier 10^{2011} au tableau. Par la suite, lors de son tour, chaque joueur peut faire l'une des deux choses suivantes :

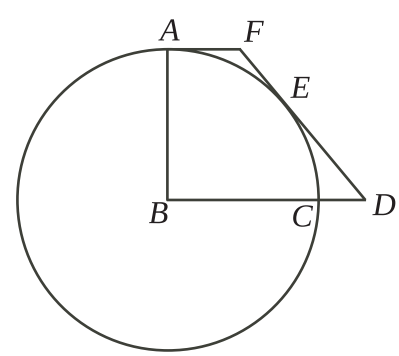
   (i) remplacer n'importe quel nombre x qui est au tableau par deux entiers a et b supérieurs à 1 tels que $x = ab$, ou

   (ii) effacer un nombre au tableau ou effacer chacun de deux nombres égaux qui sont au tableau.

   Il peut donc y avoir beaucoup de nombres au tableau à n'importe quel moment. Le premier joueur qui ne peut faire l'une ou l'autre de ces deux options est perdant. Déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante et expliquer la stratégie.

5. Chaque sommet d'un polygone régulier à 11 côtés est colorié en noir ou en rouge. On forme ensuite tous les triangles possibles dont les sommets sont choisis parmi ceux du polygone. Démontrer qu'il existe deux triangles congruents ayant trois sommets noirs ou deux triangles congruents ayant trois sommets rouges.

6. Dans la figure ci-contre, $ABDF$ est un trapèze pour lequel AF est parallèle à BD et AB est perpendiculaire à BD. Le cercle de centre B et de rayon AB coupe BD en C et il est tangent à DF en E. Soit x l'aire de la région qui est à l'intérieur du quadrilatère $ABEF$, mais à l'extérieur du cercle et soit y l'aire de la région qui est à l'intérieur du triangle EBD, mais à l'extérieur du cercle. Soit $\alpha = \angle EBC$. Démontrer qu'il existe exactement une valeur de α ($0° \leq \alpha \leq 90°$) pour laquelle $x = y$ et que cette valeur de α satisfait à $\frac{1}{2} < \sin \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$.



7. Mille élèves participent au Défi fermé canadien de mathématiques 2011. Chaque élève reçoit un numéro matricule unique abc de trois chiffres, a, b et c étant chacun un chiffre de 0 à 9. Plus tard, lors de la notation du concours, il faudra embaucher un nombre de correcteurs. Chaque correcteur recevra un numéro matricule unique xy de deux chiffres, x et y étant chacun un chiffre de 0 à 9. Le correcteur xy pourra corriger n'importe quelle copie portant un numéro de la forme xyA ou xAy ou Axy, quel que soit le chiffre A. Quel est le plus petit nombre possible de correcteurs qu'il faudra embaucher pour s'assurer que toutes les copies seront notées ?

8. Déterminer tous les couples (n, m) d'entiers strictement positifs pour lesquels il existe une suite infinie $\{x_k\}$ de 0 et de 1 de manière que si $x_i = 0$, alors $x_{i+m} = 1$ et si $x_i = 1$, alors $x_{i+n} = 0$.