

**OLYMPIADE MATHÉMATIQUE DU CANADA 2011**  
**PROBLÈMES ET SOLUTIONS**

- (1) Considérer les nombres  $n$  à 70 chiffres avec la propriété que chacun des chiffres  $1, 2, 3, \dots, 7$  apparaît dix fois dans l'expansion décimale de  $n$  (et que 8, 9 et 0 n'y apparaissent pas). Montrer qu'aucun nombre de cette forme ne peut être divisé par un autre nombre de la même forme.

**Solution.**

Supposons le contraire : ils existent  $a$  et  $b$  sous la forme prescrite, telle que  $b \geq a$  et  $a$  divise  $b$ . Alors,  $a$  divise  $b - a$ .

Une affirmation :  $a$  n'est pas divisible par 3, mais  $b - a$  est divisible par 9. En effet, la somme des chiffres est  $10(1 + \dots + 7) = 280$ , à la fois pour  $a$  et  $b$ . [Ici, on a besoin de connaître ou de démontrer qu'un nombre entier  $n$  est équivalent à la somme de ses chiffres modulo 3 et modulo 9.]

Nous concluons que  $b - a$  est divisible par  $9a$ . Mais cela est impossible, puisque  $9a$  a 71 chiffres et  $b$  n'a que 70 chiffres, alors  $9a > b > b - a$ .  $\square$

- (2) Soient  $ABCD$  un quadrilatère cyclique dont les côtés opposés ne sont pas parallèles,  $X$  l'intersection de  $AB$  et de  $CD$ , et  $Y$  l'intersection de  $AD$  et de  $BC$ . Supposons que la bissectrice de  $\angle AXD$  intersecte  $AD, BC$  en  $E, F$  respectivement et que la bissectrice de  $\angle AYB$  intersecte  $AB, CD$  en  $G, H$  respectivement. Montrer que  $EGFH$  est un parallélogramme.

**Solution.** Puisque  $ABCD$  est cyclique,  $\triangle XAC \sim \triangle XDB$  et  $\triangle YAC \sim \triangle YBD$ . Donc,

$$\frac{XA}{XD} = \frac{XC}{XB} = \frac{AC}{DB} = \frac{YA}{YB} = \frac{YC}{YD}.$$

Soit  $s$  ce rapport. Donc, par le théorème de la bissectrice,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{XA}{XD} = \frac{XC}{XB} = \frac{CF}{FB} = s,$$

et

$$\frac{AG}{GB} = \frac{YA}{YB} = \frac{YC}{YD} = \frac{CH}{HD} = s.$$

Alors,  $\frac{AG}{GB} = \frac{CF}{FB}$  et  $\frac{AE}{ED} = \frac{DH}{HC}$ . Donc,  $EH \parallel AC \parallel GF$  et  $EG \parallel DB \parallel HF$ . Alors,  $EGFH$  est un parallélogramme.  $\square$

- (3) Amy a divisé un carré en un nombre fini de plusieurs rectangles blancs et rouges, chacun ayant les côtés parallèles aux côtés du carré. À l'intérieur de chaque rectangle blanc, elle écrit sa largeur divisée par sa hauteur. À l'intérieur de chaque rectangle rouge, elle écrit sa hauteur divisée par sa largeur. Finalement, elle calcule  $x$ , la somme de tous ces

nombres. Si l'aire totale des rectangles blancs égale l'aire totale des rectangles rouges, quelle est la plus petite valeur de  $x$  possible?

**Solution.** Soient  $a_i$  et  $b_i$  la largeur et la hauteur de chaque rectangle blanc, et soient  $c_i$  et  $d_i$  la largeur et la hauteur de chaque rectangle rouge. Aussi, soit  $L$  la longueur des côtés du carré initial.

**Lemme:** Soit  $\sum a_i \geq L$  ou  $\sum d_i \geq L$ .

**Démonstration du lemme:** Supposons qu'il existe un segment de droite horizontale au travers du carré qui est entièrement recouvert de rectangles blancs. La largeur totale de ces rectangles est au moins  $L$ , et le lemme est démontré. Sinon, il y a un rectangle rouge qui croise chaque segment de droite horizontal, et alors la hauteur totale de ces rectangles est au moins  $L$ .  $\square$

Maintenant, supposons, sans perte de généralité que  $\sum a_i \geq L$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left( \sum \frac{a_i}{b_i} \right) \cdot \left( \sum a_i b_i \right) &\geq \left( \sum a_i \right)^2 \\ &\geq L^2. \end{aligned}$$

Mais nous savons que  $\sum a_i b_i = \frac{L^2}{2}$ , il s'ensuit donc que  $\sum \frac{a_i}{b_i} \geq 2$ . En outre, chaque  $c_i \leq L$ , alors

$$\sum \frac{d_i}{c_i} \geq \frac{1}{L^2} \cdot \sum c_i d_i = \frac{1}{2}.$$

Donc,  $x$  est au moins 2,5. L'égalité  $x = 2,5$  peut être atteinte en utilisant une seule couleur dans la moitié supérieure du carré, et en utilisant l'autre couleur dans la moitié inférieure du carré.  $\square$

- (4) Démontrer qu'il existe un entier positif  $N$  tel que pour tout entier  $a > N$ , il existe une sous-chaîne contiguë de l'expansion décimale de  $a$  qui est divisible par 2011. (Par exemple, si  $a = 153204$ , alors 15, 532, et 0 sont toutes des sous-chaînes contiguës de  $a$ . Notez bien que 0 est divisible par 2011.)

**Solution.** Nous affirmons que si le développement décimal de  $a$  compte au moins 2012 chiffres, alors  $a$  contient la sous-chaîne requise. Soit  $a_k a_{k-1} \dots a_0$  le développement décimal de  $a$ . Pour  $i = 0, \dots, 2011$ , soit  $b_i$  le nombre avec le développement décimal  $a_i a_{i-1} \dots a_0$ . Par le principe des tiroirs,  $b_i \equiv b_j \pmod{2011}$  pour certains  $i < j \leq 2011$ . Il s'ensuit que 2011 divise  $b_j - b_i = c \cdot 10^i$ , où  $c$  est la sous-chaîne  $a_j \dots a_{i+1}$ . Puisque 2011 et 10 sont premiers entre eux, alors 2011 divise  $c$ .  $\square$

- (5) Soit  $d$  un entier positif. Démontrer que, pour tout entier  $S$ , il existe un entier  $n > 0$  et une suite  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ , où pour tout  $k$ ,  $\epsilon_k = 1$  ou  $\epsilon_k = -1$ , tel que

$$S = \epsilon_1(1+d)^2 + \epsilon_2(1+2d)^2 + \epsilon_3(1+3d)^2 + \dots + \epsilon_n(1+nd)^2.$$

**Solution.** Soit  $U_k = (1+kd)^2$ . En calculant la valeur de  $U_{k+3} - U_{k+2} - U_{k+1} + U_k$ , on trouve la valeur constante  $4d^2$ . En changeant le signe, on obtient la somme  $-4d^2$ .

Ainsi on obtient une expression du type qu'on désire pour  $S_0 + (4d^2)q$  et pour tout entier  $q$  aussitôt qu'on trouve une expression pour un certain nombre  $S_0$  du type désiré.

Il reste à montrer que pour tout  $S$ , il existe un entier  $S'$  tel que  $S' \equiv S \pmod{4d^2}$  et  $S'$  peut être exprimé sous la forme désirée. Considérer la somme

$$(1+d)^2 + (1+2d)^2 + \dots + (1+Nd)^2,$$

où  $N$  is "assez grand." Sans perdre la généralité, on peut toujours choisir  $N$  de sorte que la somme est soit paire, soit impaire.

En changeant le signe devant  $(1+kd)^2$  au négative, la somme décroît de  $2(1+kd)^2$ . En particulier, si  $k \equiv 0 \pmod{2d}$ , la somme décroît de  $2$  (modulo  $4d^2$ ). Alors

Si  $N$  est assez grand, on peut choisir plusieurs  $k < N$  tels que  $k$  est un multiple de  $2d$ . En interchangeant les signes devant  $r$  de ces valeurs, on change ("en bas") la classe de congruence modulo  $4d^2$  par  $2r$ . En choisissant  $N$  de sorte que la somme originale est impaire et une valeur convenable de  $r < 2d^2$ , on peut obtenir des nombres qui sont congrus à tous les nombres impairs modulo  $4d^2$ . En choisissant  $N$  de sorte que la somme originale est paire, on peut obtenir des nombres qui sont congrus à tous les nombres pairs modulo  $4d^2$ . Ceci termine la preuve.  $\square$